結び目のトポロジー

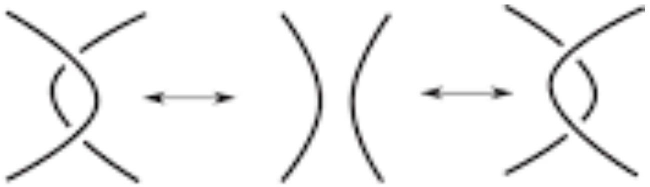
鮑園園　（東京大学数理科学研究科）

6/7

前回の復習

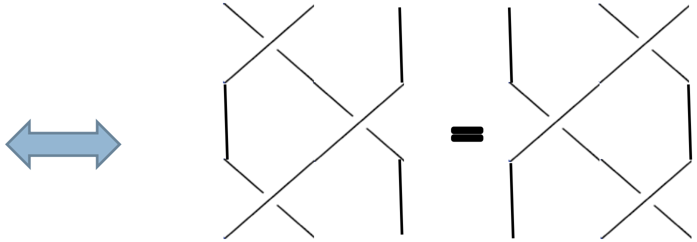
- 結び目は空間中の閉曲線、線を切らずに連続的に変形しても同じ結び目（結び目は生き物）
- 平面での結び目図式を使って結び目を表す。ライデマイスター移動という図式の局所変形を使って結び目の同値性を調べられる。

RI



RII

RIII



RIII

$\{$ 結び目 $\}/$同値 $= \{$ 結び目の図式 $\}/$R1, RII, RIII

- 見た目や図式だけから同じ結び目かどうか判断しにくい、不変量が必要（生き物のDNA情報のようなもの）

図式から不変量を定義する

写像 $F : \{$ 結び目の図式 $\} \to A$ s.t.

D_1 と D_2 がライデマイスター移動で繋がる $\implies F(D_1) = F(D_2) \in A$

のとき、写像 F による像は結び目の不変量になる。

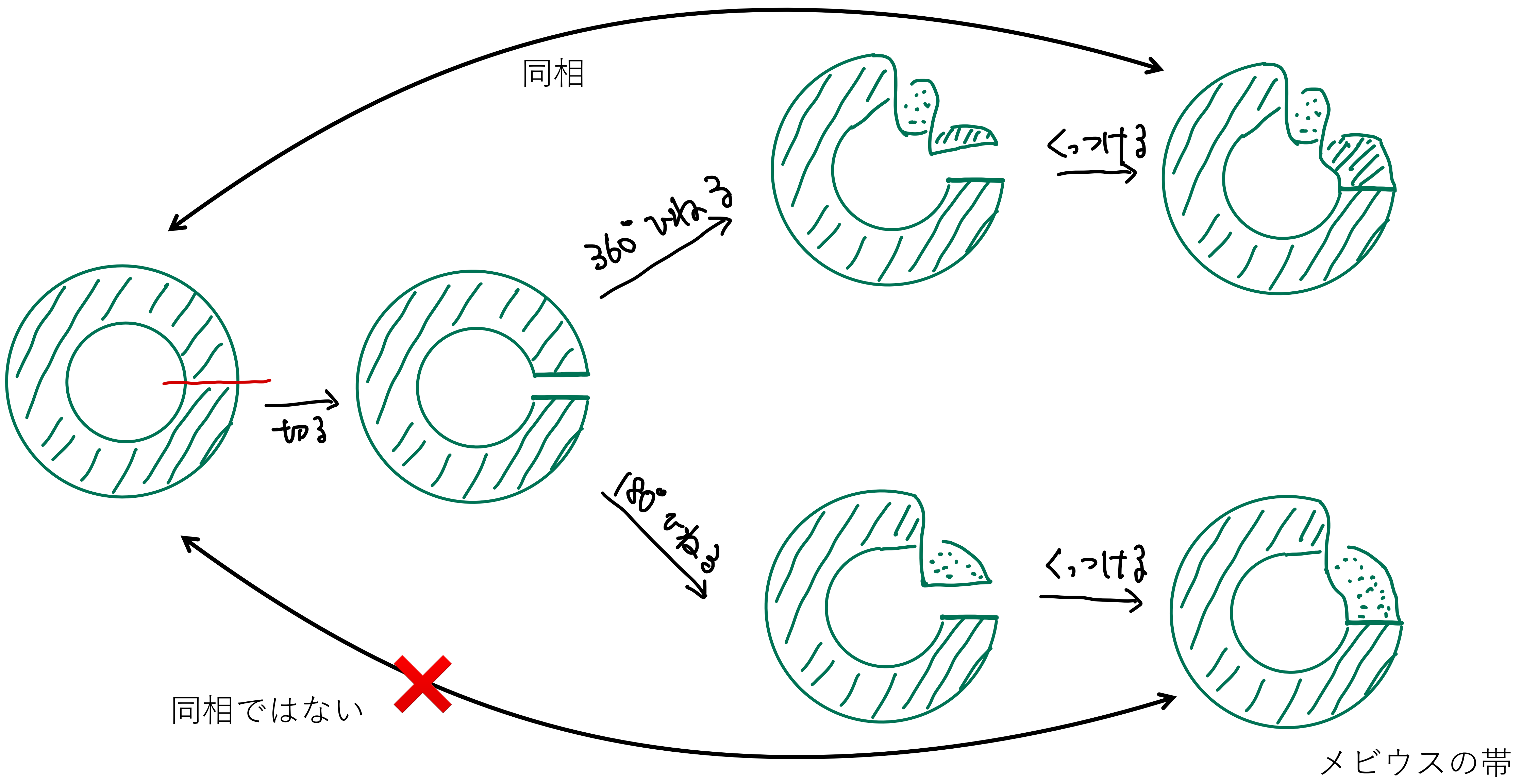
Aは整数、多項式、ベクトル空間、群、環、ホモロジーなどのような集合

前回受けた質問

質問１：トポロジーや結び目の考え方を利用している分野を知りたいです。

- 環状DNA操作（DNA組換えのメカニズム）
- 高分子化合物のトポロジー（様々なグラフの構造を持つ多環状高分子化 合物）
- トポロジカル物質（**次回の大同暁人先生による「物質の中のトポロジー」**）
- トポロジカル量子計算

質問２：ハサミとのりを使った上で同相になるには何か条件があるのでしょうか



JONES多項式ーKAUFFMANによる状態和模型

Jones多項式

BULLETIN (New Series) OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 12, Number 1, January 1985

結び目の多項式不変量

A POLYNOMIAL INVARIANT FOR KNOTS VIA VON NEUMANN ALGEBRAS[1]

BY VAUGHAN F. R. JONES[2]

A theorem of J. Alexander [**1**] asserts that any tame oriented link in 3-space may be represented by a pair (b, n), where b is an element of the n-string braid group B_n. The link L is obtained by closing b, i.e., tying the top end of each string to the same position on the bottom of the braid as shown in Figure 1. The closed braid will be denoted $b^\wedge$.

While investigating the index of a subfactor of a type II_1 factor, the author was led to analyze certain *finite-dimensional* von Neumann algebras A_n generated by an identity 1 and n projections, which we shall call $e_1, e_2, \ldots, e_n$. They satisfy the relations

(I) $e_i^2 = e_i, e_i^* = e_i$,
(II) $e_i e_{i\pm 1} e_i = t/(1+t)^2 e_i$,
(III) $e_i e_j = e_j e_i$ if $|i-j| \geq 2$.
Here t is a complex number. It has been shown by H. Wenzl [**24**] that an arbitrarily large family of such projections can only exist if t is either real and positive or $e^{\pm 2\pi i/k}$ for some $k = 3, 4, 5, \ldots$. When t is one of these numbers, there exists such an algebra for all n possessing a trace $\mathrm{tr}\colon A_n \to \mathbf{C}$ completely determined by the normalization $\mathrm{tr}(1) = 1$ and

(IV) $\mathrm{tr}(ab) = \mathrm{tr}(ba)$,
(V) $\mathrm{tr}(we_{n+1}) = t/(1+t)^2\, \mathrm{tr}(w)$ if w is in A_n,
(VI) $\mathrm{tr}(a^*a) > 0$ if $a \neq 0$
(note $A_0 = \mathbf{C}$).

Jones 代数

Vaughan Jones (1952-2020)

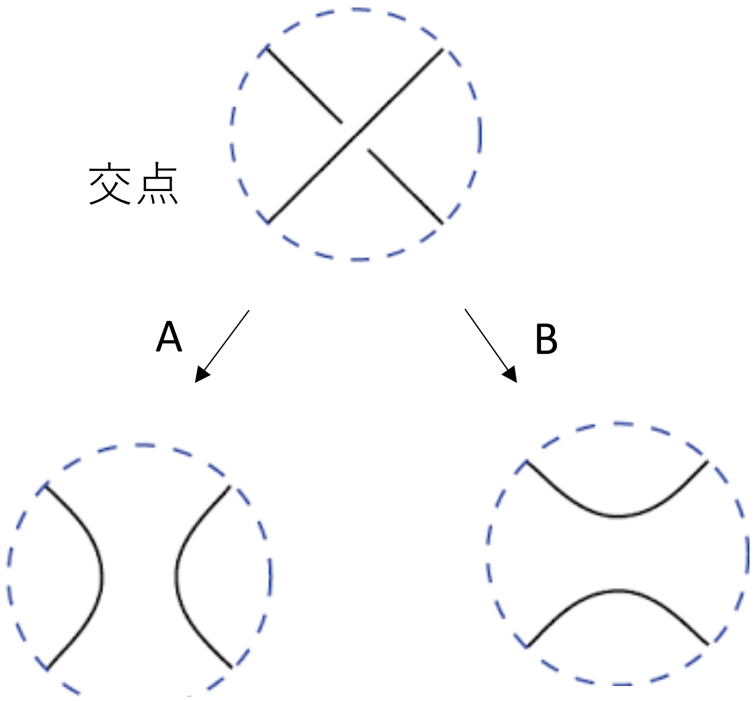
1990年フィールズ賞受賞

専門：作用素環論

defines $g_i = \sqrt{t}(te_i - (1 - e_i))$, the g_i satisfy the correct relations, and one obtains representations r_t of B_n by sending s_i to g_i.

THEOREM 1. *The number* $(-(t+1)/\sqrt{t})^{n-1}\, \mathrm{tr}(r_t(b))$ *for* b *in* B_n *depends only on the isotopy class of the closed braid* $b^\wedge$.

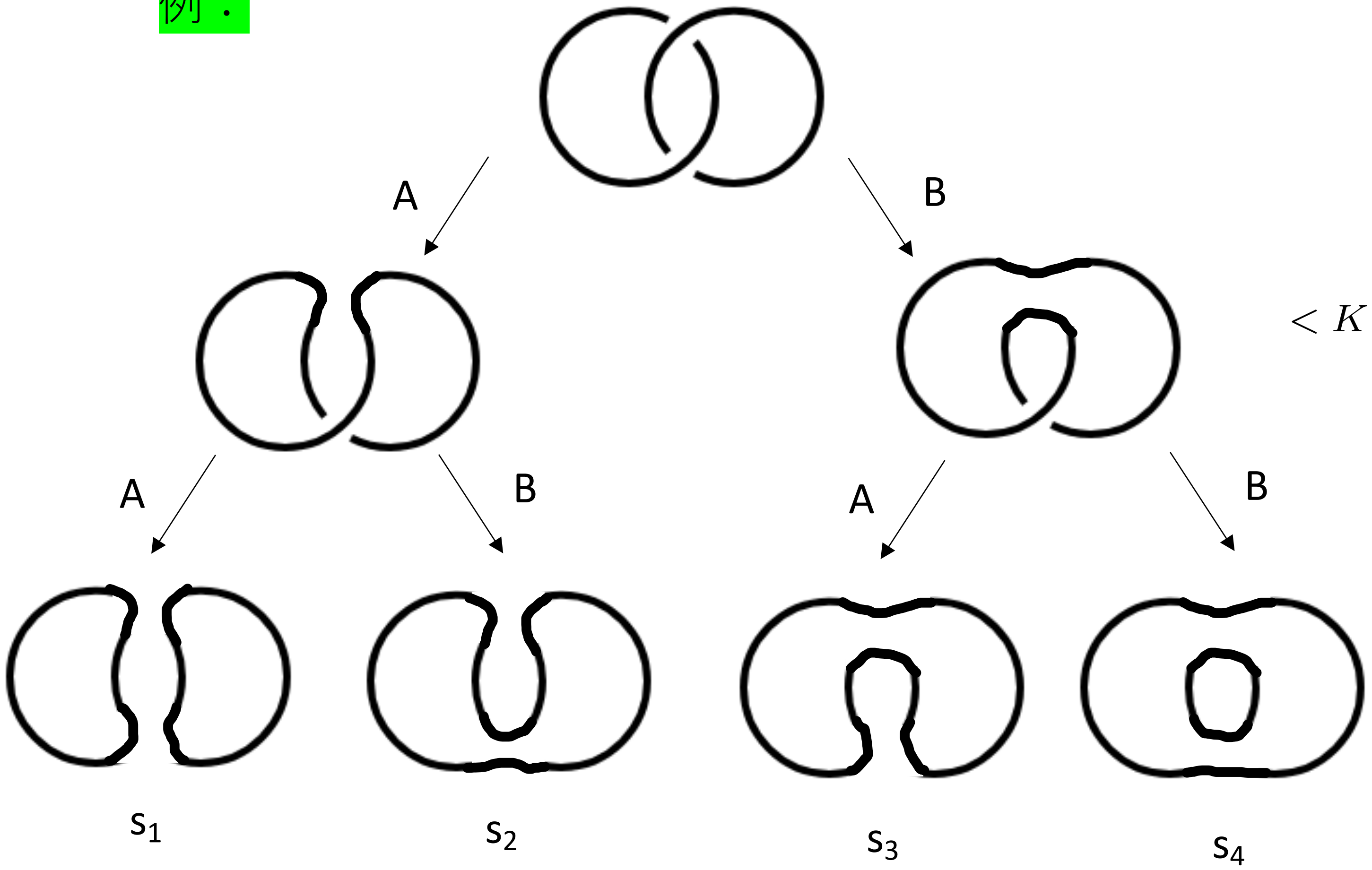
Kauffman状態和模型



Louis H. Kauffman (1945生まれ)

各交点に２つの状態AとBのどちらかを対応させたものを結び目Kの状態和と呼ぶ。

例：



交点の数がnの場合、状態の数が2^n

$$
\begin{aligned}
< K > &= (-a^2 - a^{-2})a^2 + 1 + 1 + (-a^2 - a^{-2})a^{-2} \\
&= -a^4 - a^{-4}
\end{aligned}
$$

Kauffman状態和

$$
< K >= \sum_{s:\ K\ \text{の状態}} (-a^2 - a^{-2})^{d(s)-1} \prod_{c:\ K\ \text{の交点}} W_c(s)
$$

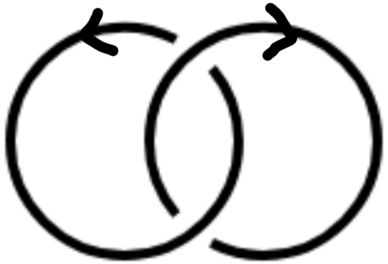
$$
W_c(s) = \begin{cases} a & \text{状態 } A \text{ の場合} \\ a^{-1} & \text{状態 } B \text{ の場合} \end{cases}
$$

$d(s)$：状態 s の成分数（閉曲線の本数）

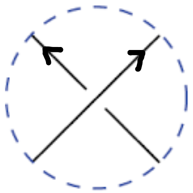
Jones多項式

$$J(K) := (-a^3)^{-[(\sharp\ \text{正交点})-(\sharp\ \text{負交点})]} < K >$$

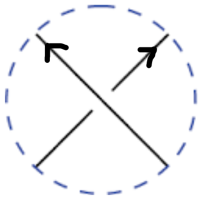
例：



$$J(K) = (-a^3)^{-2} < K >= -a^{-2} - a^{-10}$$



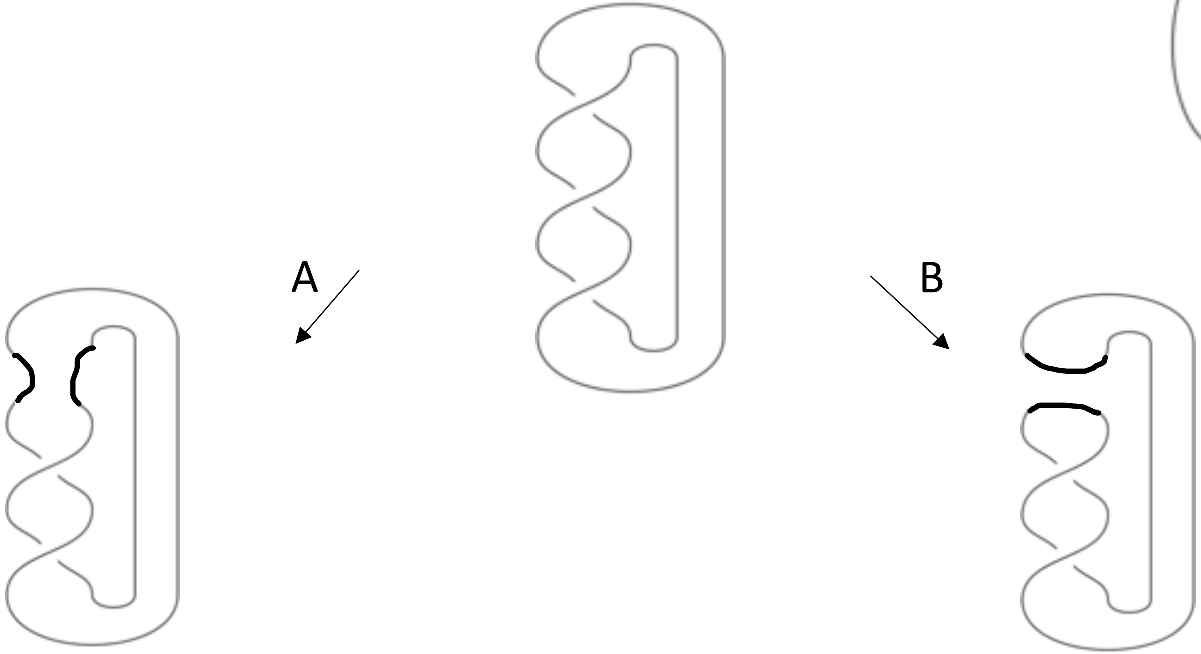
正交点

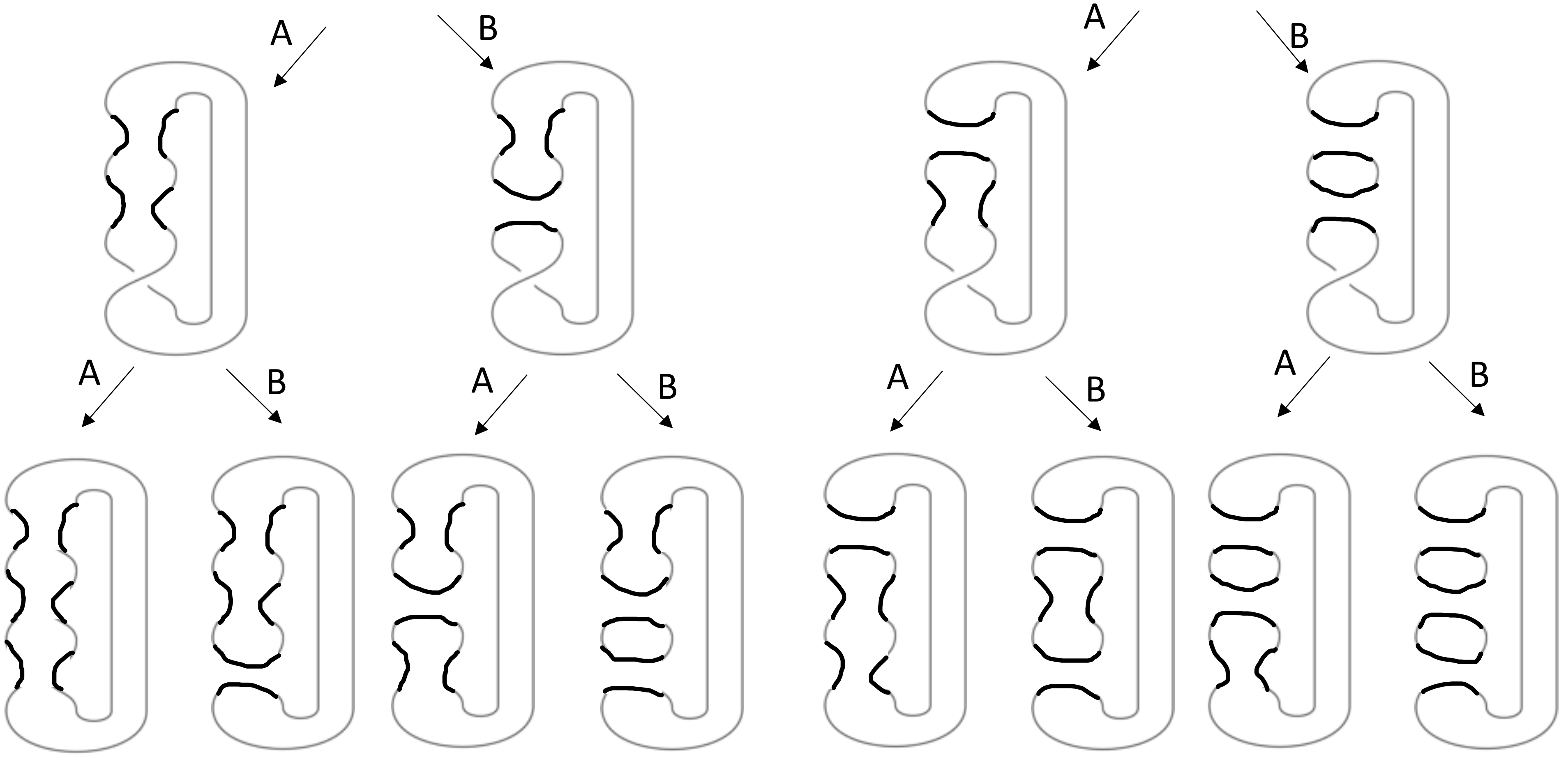


負交点

例：

K





$a^3\mu$ $\quad a \quad a \quad a^{-1}\mu \quad a \quad a^{-1}\mu \quad a^{-1}\mu \quad a^{-3}\mu^2$

$\mu = -a^2 - a^{-2}$

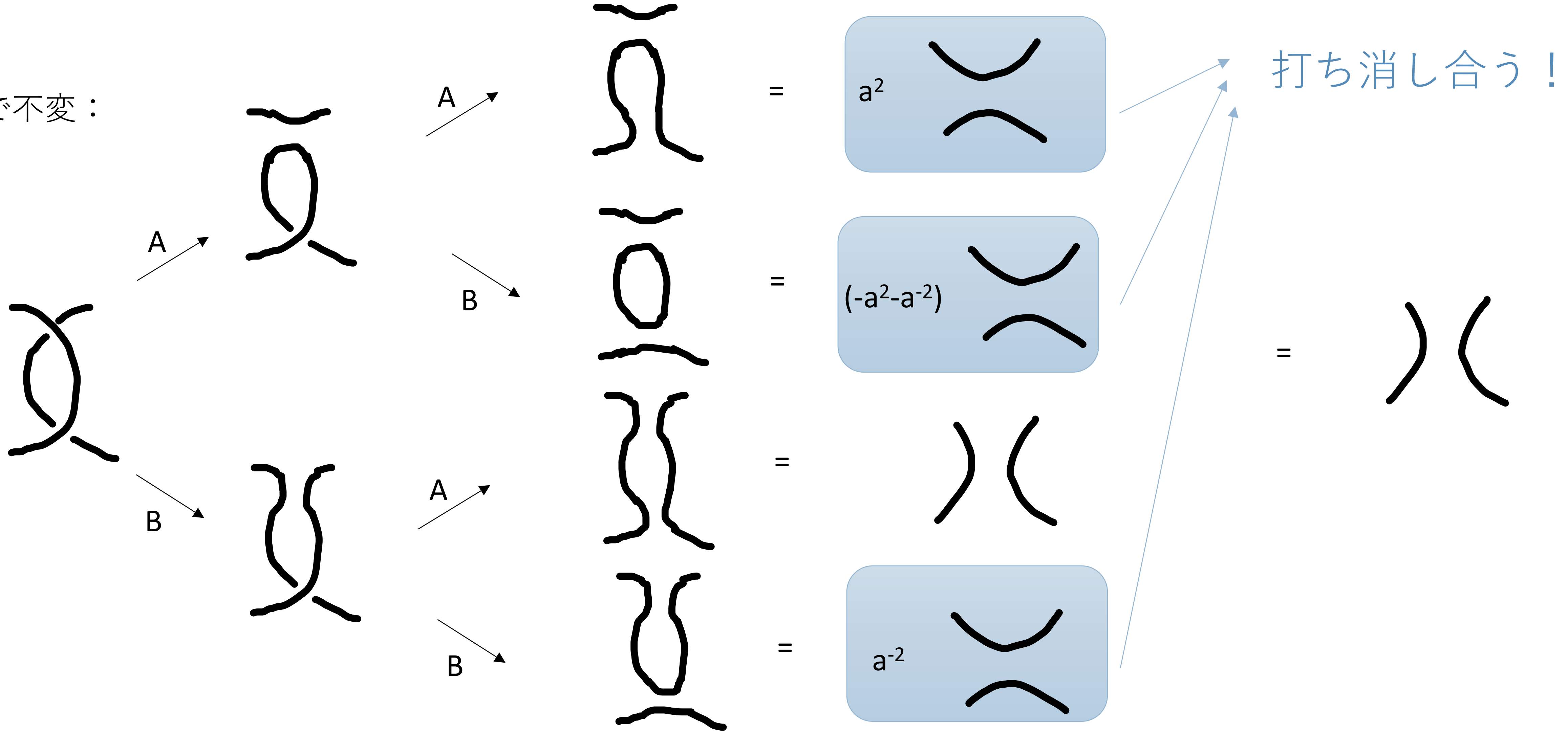
$$< K >= -a^5 - a^{-3} + a^{-7} \qquad \mathrm{J}(K) = a^{-4} + a^{-12} - a^{-16}$$

なぜ不変量になるか

位相不変性

$J(K)$ はライデマイスター移動 RI,RII, RIII で不変である。

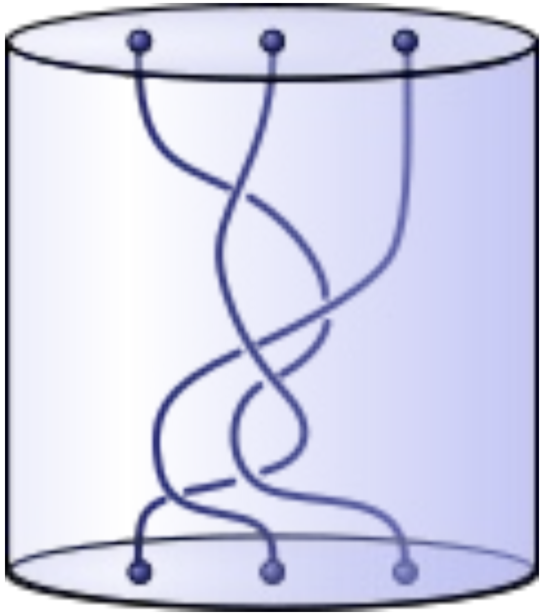
RIIで不変：



結び目と組紐群

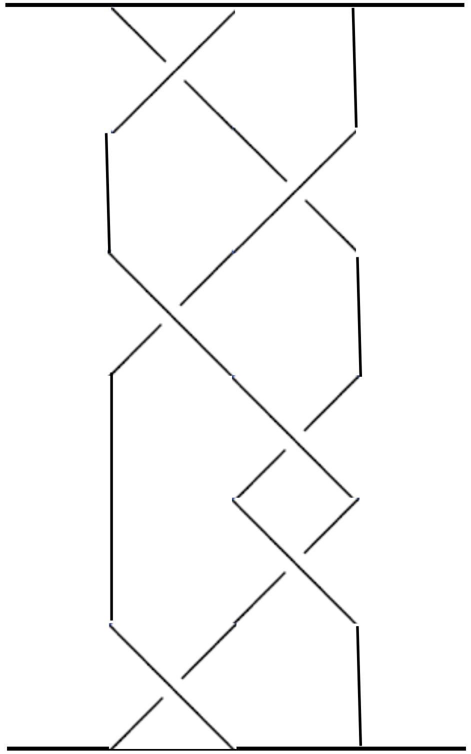
数学における組紐

工芸品の組紐



数学の組紐

=



全ての組紐は

σ

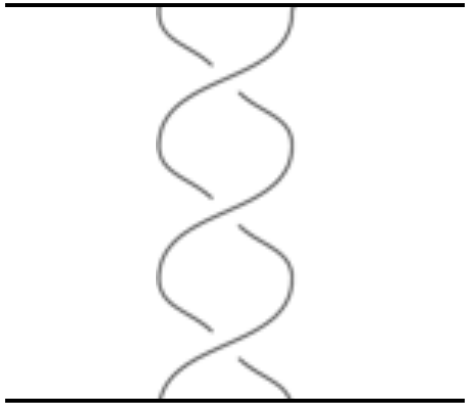
、

σ^{-1}

と縦線の“合成”である

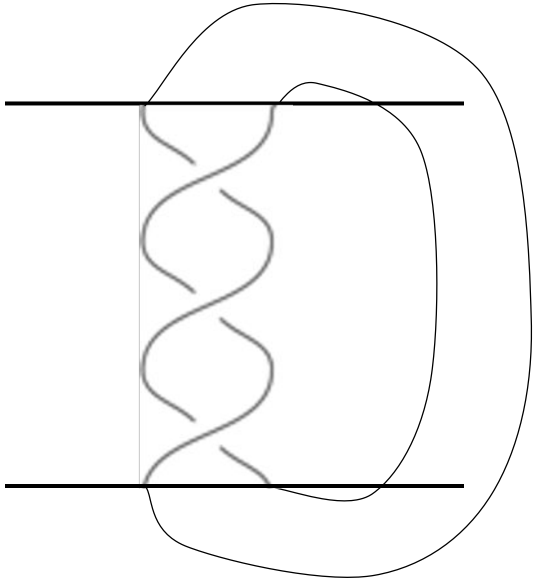
写真：Wikipedia

組紐と結び目の対応



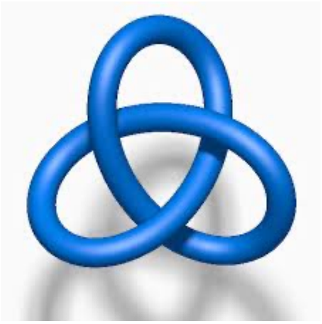
b

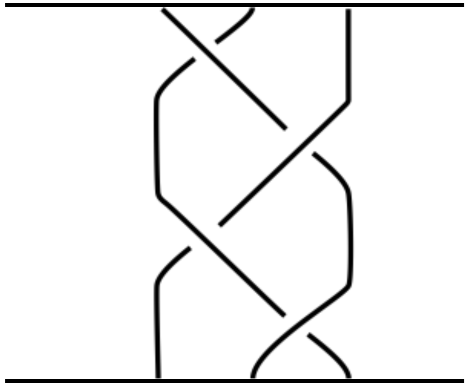
閉じる



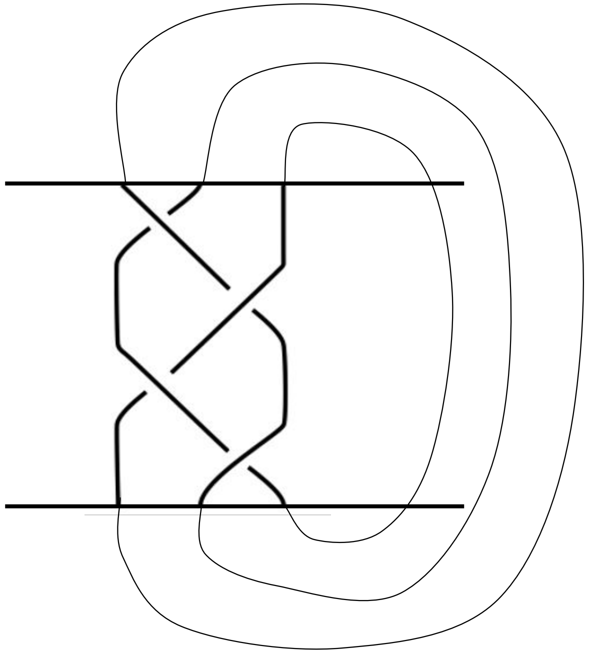
bの閉包

=

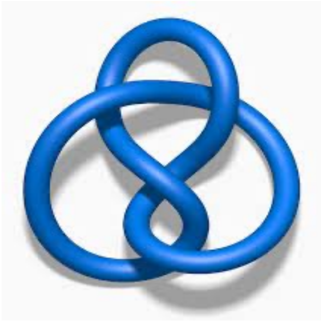




閉じる



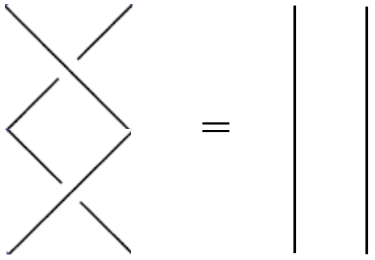
=



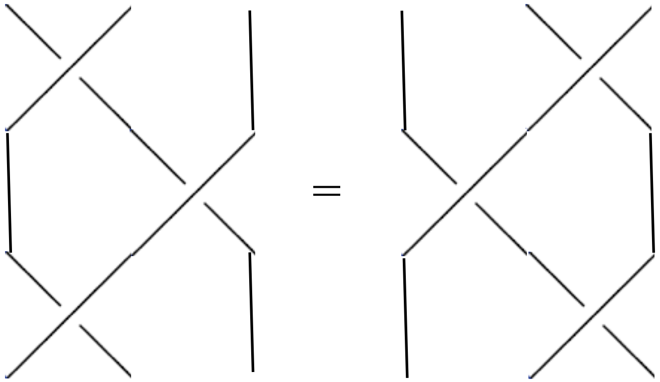
組紐を使って結び目同値を調べる

- （Alexanderの定理）　全ての結び目はある組紐に対応する
- （Markovの定理）二つの組紐は同値な結び目に対応する必要十分条件は次の関係で移り合えること

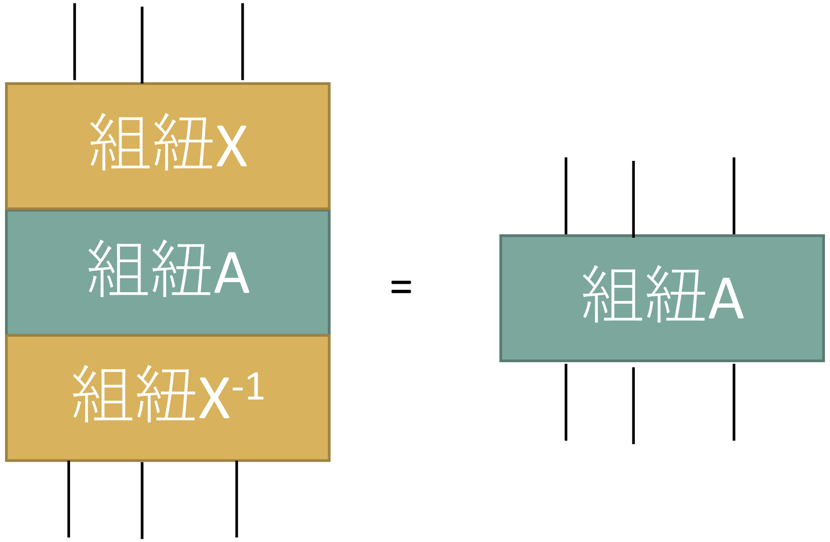
①



②

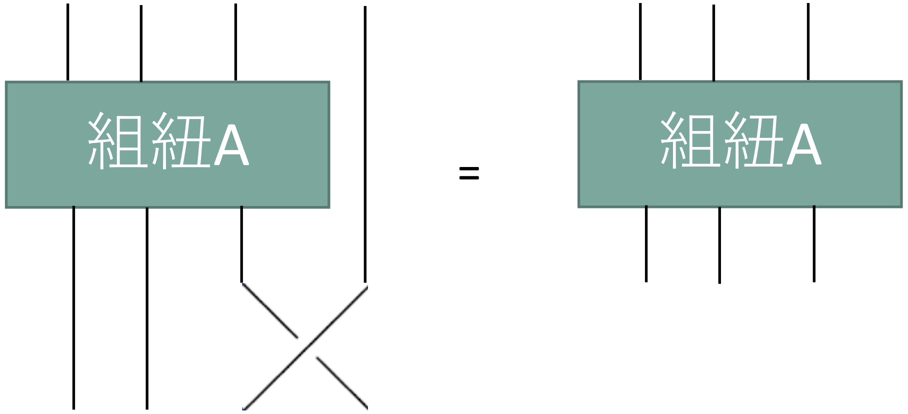


③



共役

④



安定化

組紐から結び目不変量を定義する

Alexanderの定理とMarkovの定理により、

$$\{\text{ 結び目 }\}/\text{同値} = \{\text{ 組紐 }\}/①,②,③,④$$

bの閉包 ⟷ 組紐b

組紐から不変量を定義する

写像 $F : \{\text{ 組紐 }\} \to A$ s.t.

b_1 と b_2 が ①,②,③,④ で繋がる $\Longrightarrow F(b_1) = F(b_2) \in A$

のとき、写像 F による像は結び目の不変量になる。

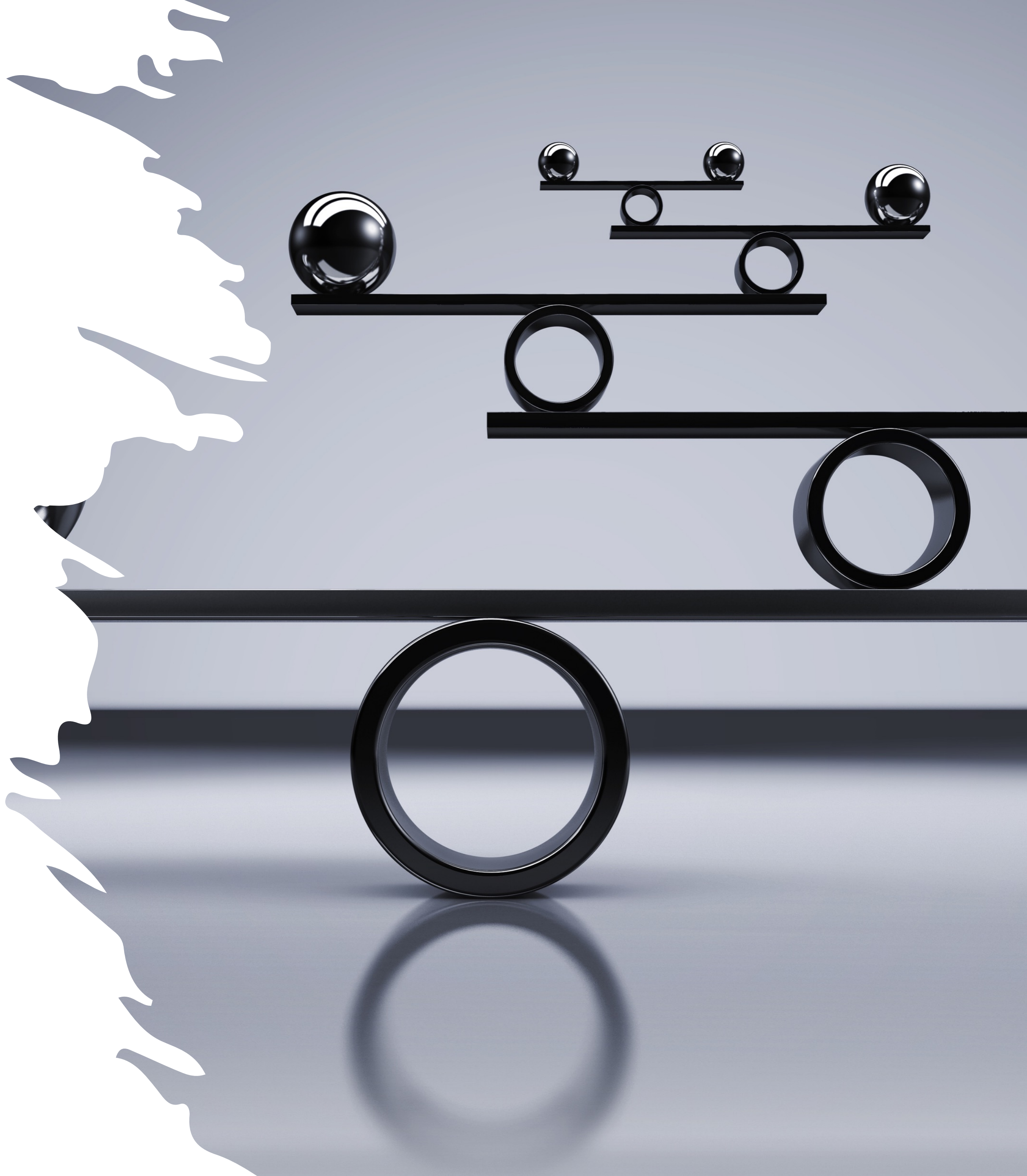
例

defines $g_i = \sqrt{t}(te_i - (1 - e_i))$, the g_i satisfy the correct relations, and one obtains representations r_t of B_n by sending s_i to g_i.

THEOREM 1. *The number* $(-(t+1)/\sqrt{t})^{n-1}\,\mathrm{tr}(r_t(b))$ *for* b *in* B_n *depends only on the isotopy class of the* $\boxed{\textit{closed braid } b^\wedge}$.

閉包

Yang-Baxter方程式と結び目の不変量



Yang-Baxter方程式

V：2 次元複素ベクトル空間とする。標準単位ベクトル $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は V の基底

$V \otimes V$：V と V のテンソル積。$v_1 \otimes v_1, v_1 \otimes v_2, v_2 \otimes v_1, v_2 \otimes v_2$ は $V \otimes V$ の基底

n次元に対して同じように定義できる

R行列の別の名前：
Yang-Baxter operator

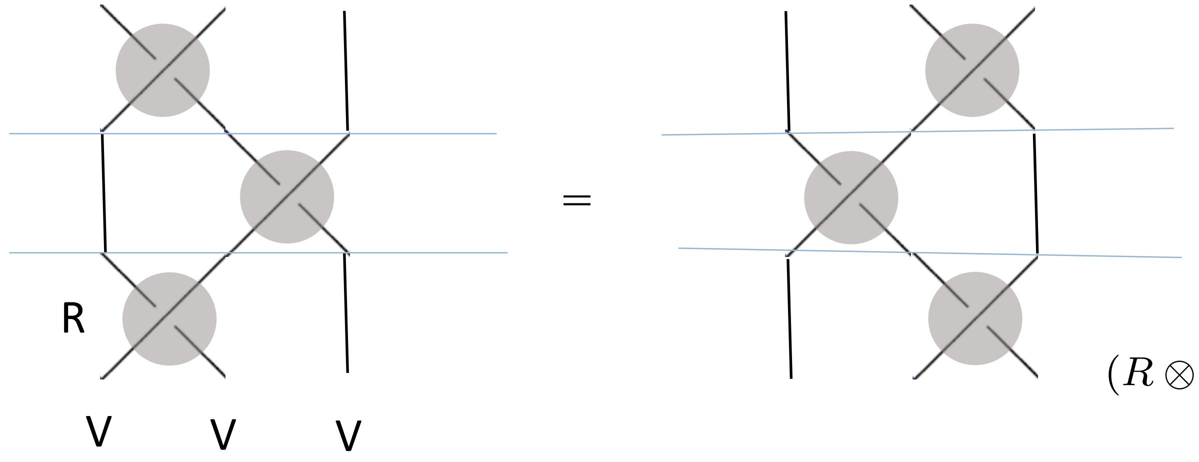
R-行列

自己同型 $R : V \otimes V \to V \otimes V$ が以下の関係式を満たすとき、R-行列であるという。

$$(R \otimes id_V) \circ (id_V \otimes R) \circ (R \otimes id_V) = (id_V \otimes R) \circ (R \otimes id_V) \circ (id_V \otimes R)$$

Yang-Baxter 方程式

イメージ



$$R(v_i \otimes v_j) = \sum_{1 \leq k,l \leq 2} R_{ij}^{kl} v_k \otimes v_l$$

$$(R \otimes id_V)(v_i \otimes v_j \otimes v_t) = \sum_{1 \leq k,l \leq 2} R_{ij}^{kl} v_k \otimes v_l \otimes v_t$$

行列のテンソル積

A, Bを行列とする

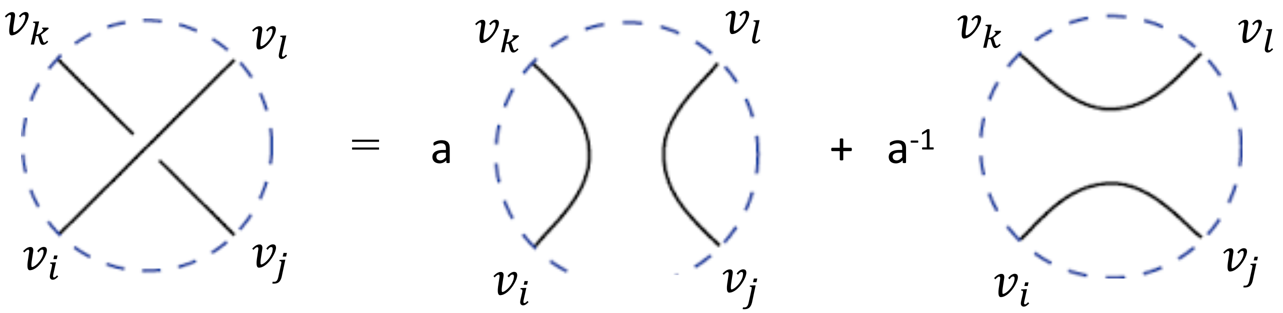
$$A \otimes B := (a_{ij}B) = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

例：

$$R = \begin{pmatrix} R^{11}_{11} & R^{11}_{12} & R^{11}_{21} & R^{11}_{22} \\ R^{12}_{11} & R^{12}_{12} & R^{12}_{21} & R^{12}_{22} \\ R^{21}_{11} & R^{21}_{12} & R^{21}_{21} & R^{21}_{22} \\ R^{22}_{11} & R^{22}_{12} & R^{22}_{21} & R^{22}_{22} \end{pmatrix}$$

$$R \otimes id_V = \begin{pmatrix} R^{11}_{11} & 0 & R^{11}_{12} & 0 & R^{11}_{21} & 0 & R^{11}_{22} & 0 \\ 0 & R^{11}_{11} & 0 & R^{11}_{12} & 0 & R^{11}_{21} & 0 & R^{11}_{22} \\ R^{12}_{11} & 0 & R^{12}_{12} & 0 & R^{12}_{21} & 0 & R^{12}_{22} & 0 \\ 0 & R^{12}_{11} & 0 & R^{12}_{12} & 0 & R^{12}_{21} & 0 & R^{12}_{22} \\ R^{21}_{11} & 0 & R^{21}_{12} & 0 & R^{21}_{21} & 0 & R^{21}_{22} & 0 \\ 0 & R^{21}_{11} & 0 & R^{21}_{12} & 0 & R^{21}_{21} & 0 & R^{21}_{22} \\ R^{22}_{11} & 0 & R^{22}_{12} & 0 & R^{22}_{21} & 0 & R^{22}_{22} & 0 \\ 0 & R^{22}_{11} & 0 & R^{22}_{12} & 0 & R^{22}_{21} & 0 & R^{22}_{22} \end{pmatrix}$$

Jones多項式（Kauffman状態和）に対応するR-行列



$v_i, v_j, v_k, v_l \in \{v_1, v_2\}$

$$R_{ij}^{kl} = a \cdot I_{ij}^{kl} + a^{-1} Q_{ij}^{kl}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -a^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって

$$R = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-1} & 0 \\ 0 & a^{-1} & a - a^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

R-行列となる！

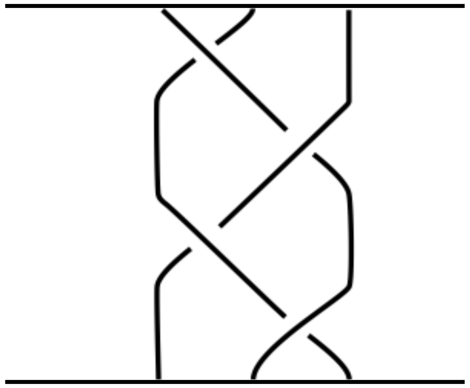
組紐の行列表現

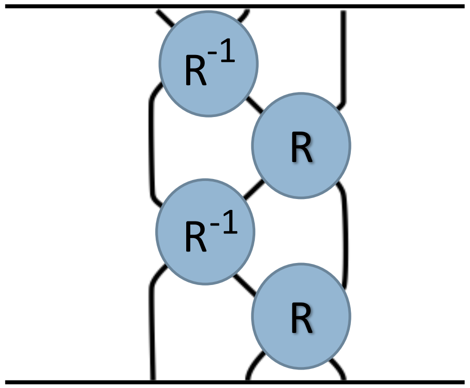
R をR-行列とする。　次の対応で定める写像を組紐の行列表現という。

$\sigma \rightarrow R$

$\sigma^{-1} \rightarrow R^{-1}$

例





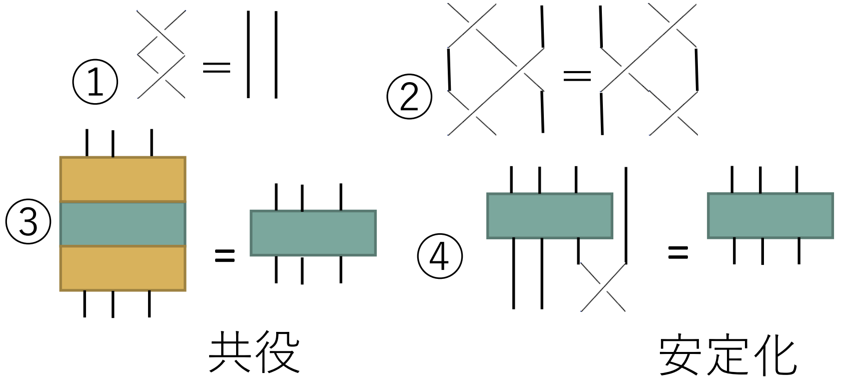
$$(\mathrm{R}^{-1}\otimes \mathrm{Id})\circ(\mathrm{Id}\otimes R)\circ(\mathrm{R}^{-1}\otimes \mathrm{Id})\circ(\mathrm{Id}\otimes R)$$

$$: V\otimes V\otimes V \rightarrow V\otimes V\otimes V$$

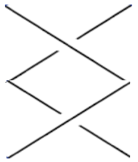
組紐
（位相的な）研究対象

代数的な写像

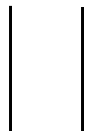
組紐の行列表現（R-行列）から不変量を作れる？



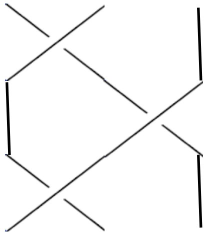
①について


→ $R^{-1} \circ R = id$

同じ写像に対応する 🤗

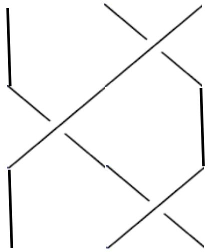

→ id

②について

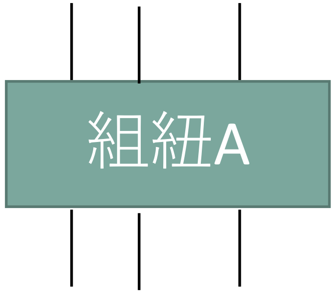

→ $(R \otimes Id_v) \circ (id_v \otimes R) \circ (R \otimes Id_v)$

$\parallel$ R-行列だから！

同じ写像に対応する 🤗


→ $(id_v \otimes R) \circ (R \otimes Id_v) \circ (id_v \otimes R)$

③について



$\Rightarrow$ f $\xrightarrow{\text{トレースを取る}}$ $tr(f) \in$ 複素数

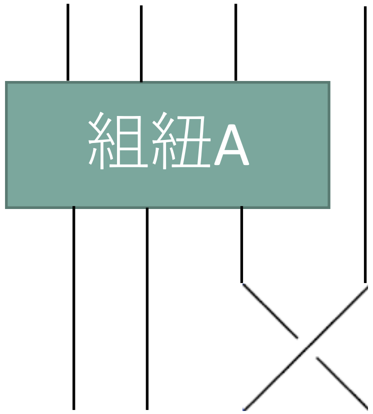
写像が違う

トレースが同じ

$\Rightarrow$ $g \circ f \circ g^{-1}$ $\xrightarrow{\text{トレースを取る}}$

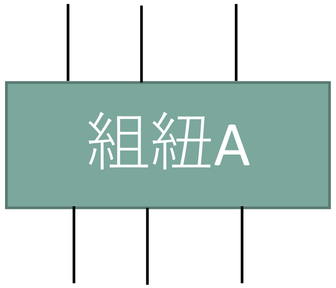
$$tr(g \circ f \circ g^{-1}) = tr(f \circ g^{-1} \circ g) = tr(f)$$

④について



→ $(f \otimes id) \circ (id \otimes R)$ → (トレースを取る) $tr[(f \otimes id) \circ (id \otimes R)]$

トレースも一般に等しくない

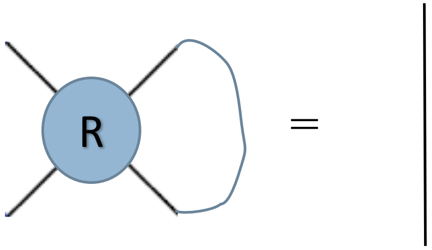


→ f → (トレースを取る) $tr(f)$

トレースが等しい時

$$\forall f,\ tr[(f \otimes id) \circ (id \otimes R)] = tr(f) \iff R^{j1}_{i1} + R^{j2}_{i2} = \delta^{j}_{i}$$

ここで $R(v_i \otimes v_j) = \sum_{1 \le k,l \le 2} R^{kl}_{ij} v_k \otimes v_l$



$tr_2(R)$

イメージ

強化されたR行列　(enhanced R-matrix)　1988年

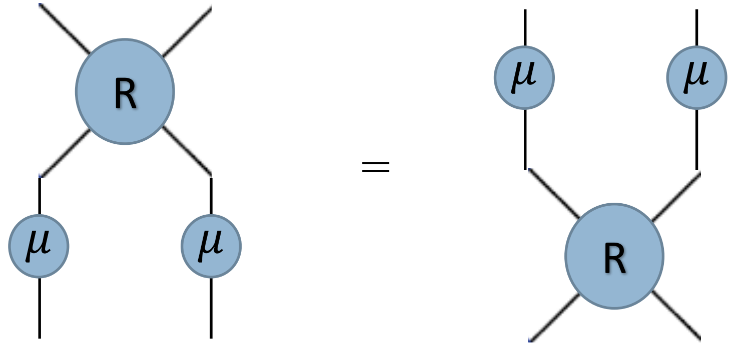
R行列以外、次の条件を満たす自己同型 $\mu: V \to V$ を加える

1. $R \circ (\mu \otimes \mu) = (\mu \otimes \mu) \circ R$
2. $tr_2(R \circ (id \otimes \mu)) = id, \qquad tr_2(R^{-1} \circ (id \otimes \mu)) = id$

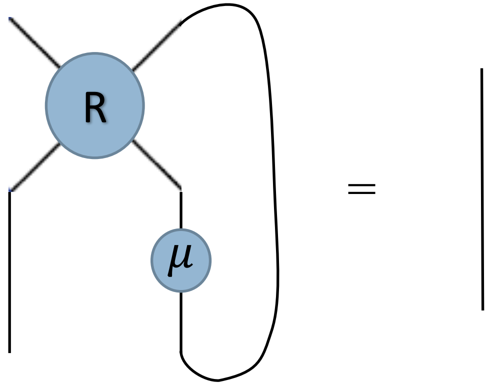
ペア（R, μ）を強化されたR-行列という。

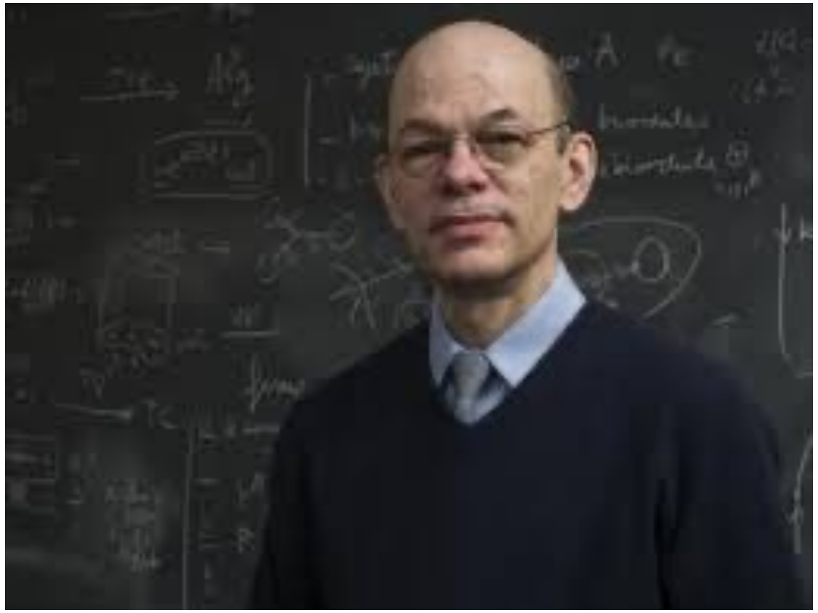
イメージ

1.



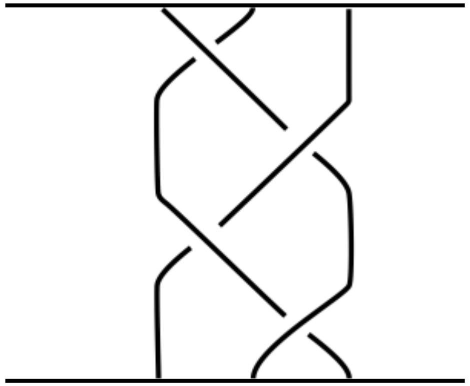
2.

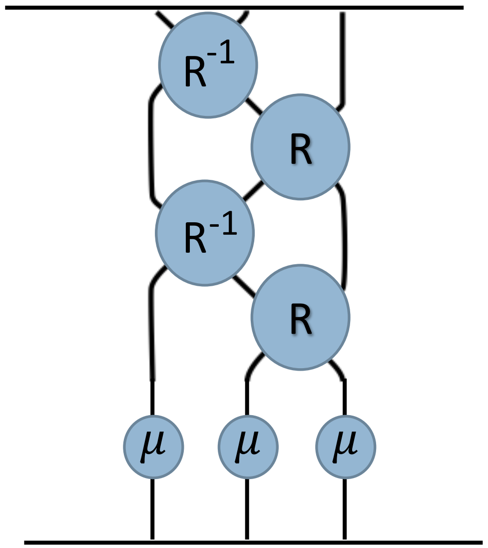




Vladimir Turaev（1954年生まれ）

強化されたR行列を使って不変量を作る





トレースを取る

組紐
F: （位相的な）研究対象 → 複素数

①②③④で不変なので、結び目不変量になる。

Jones多項式（Kauffman状態和）に対応する強化されたR-行列

$$R = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-1} & 0 \\ 0 & a^{-1} & a - a^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\tilde{R} = a^{-3}R = \begin{pmatrix} a^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-4} & 0 \\ 0 & a^{-4} & a^{-2} - a^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^{-2} \end{pmatrix}$$

$\mu = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^{-2} \end{pmatrix}$ は強化されたR-行列となる

証明：1. について、$\tilde{R}$も $\mu \otimes \mu$も対称行列だから、$R \circ (\mu \otimes \mu) = (\mu \otimes \mu) \circ R$は明らか
2. について

$$tr_2(R \circ (id \otimes \mu)) = id$$

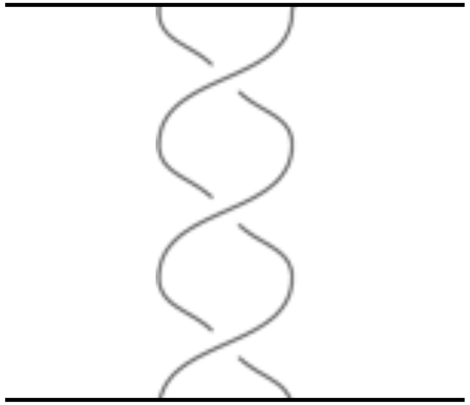
$$\tilde{R} \circ \mu \otimes \mu = \begin{pmatrix} a^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-4} & 0 \\ 0 & a^{-4} & a^{-2} - a^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-2} & 0 \\ 0 & a^{-6} & 1 - a^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^{-4} \end{pmatrix}$$

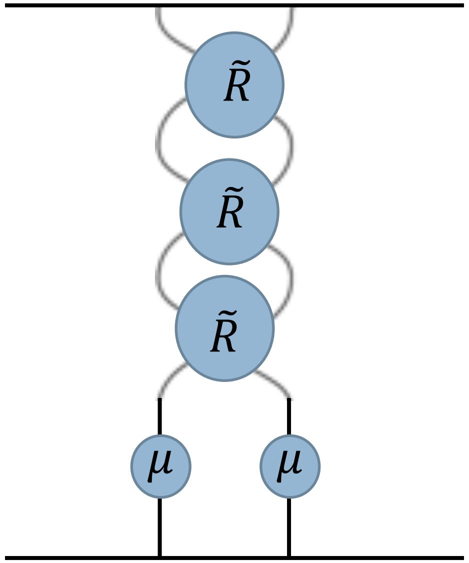
$$tr_2(R^{-1} \circ (id \otimes \mu)) = id$$

$$\tilde{R}^{-1} \circ \mu \otimes \mu = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 - a^6 & a^4 & 0 \\ 0 & a^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - a^4 & a^6 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例：

$$J(K) = a^{-4} + a^{-12} - a^{-16}$$





$$\tilde{R}^3 \circ (\mu \otimes \mu)$$

トレースを取る

$$a^{-2} + a^{-6} + a^{-10} - a^{-18}$$
$$= J(K)(a^2 + a^{-2})$$

$$=$$

$$\begin{pmatrix} a^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^{-10} - a^{-14} & a^{-8} - a^{-12} + a^{-16} & 0 \\ 0 & a^{-8} - a^{-12} + a^{-16} & a^{-6} + a^{-14} - a^{-10} - a^{-18} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^{-10} \end{pmatrix}$$

参考文献：

1. 村上順，結び目と量子群，朝倉書店，2000
2. 河野俊丈，組紐の数理，遊星社，2009
3. 村上斉，結び目のはなし，日本評論社，2022
4. Erin Colberg, A Brief History of Knot Theory,
   https://www.math.ucla.edu/~radko/191.1.05w/erin.pdf
5. 河東泰之，Vaughan F. R. Jones氏の業績I,『数学』43巻(1991), 29-34
6. 村上順，V.F.R. Jones氏の業績II,『数学』43巻(1991), 35-40